www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

MINISTERE DE L'EQUIPEMENT
ET DU LOGEMENT

COMPOSITION COMMUNE DE MATHEMATIQUES
(Temps accordé : 4 heures)

E.I.T.P.E. 1989

Dans tout le problème α est une constante réelle >1. On pose $\lambda = \frac{1}{\alpha}$. Les résultats que l'on obtiendra seront vrais indifféremment pour α réel quelconque > 1 ou pour λ réel quelconque appartenant à $]0,1[$.

PARTIE I

1) Calculer $u_k = \int_0^\pi \cos\lambda x \cos kx \, dx$ pour k entier ≥ 1.

2) Soit $C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos kx$. Donner une expression simplifiée de $C_n(x)$ pour des valeurs de x à préciser.

3) Soit Φ la fonction définie sur l'intervalle $[0,\pi]$ par :

$x \in]0,\pi]$ $\quad \Phi(x) = \dfrac{\cos\lambda x - 1}{\sin\dfrac{x}{2}}$ et $\Phi(0) = 0$. Montrer que Φ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

4) Simplifier $S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - \frac{1}{2}\int_0^\pi \Phi(x)\left[\sin(2n+1)\frac{x}{2}\right]dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi \dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\,dx$

(pour $n \geq 1$). (On pourra calculer d'abord $S_p - S_{p-1}$ pour p entier ≥ 2).

5) Quelle est la limite pour n tendant vers $+\infty$ de l'intégrale :

$$\int_0^\pi \Phi(x)\sin(2n+1)\frac{x}{2}\,dx \ ?$$

6) Calculer $I_n = \int_0^\pi \dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}\,dx$ pour n entier ≥ 0. (On pourra calculer d'abord $I_k - I_{k-1}$ pour k entier ≥ 1).

7) Démontrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, $\sum_{k=1}^{n} u_k$ tend vers une limite finie que l'on explicitera en fonction de λ.

PARTIE 2

1)a) Démontrer l'existence des intégrales :

$$\mathcal{J} = \int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,dx \ ; \quad \mathcal{I} = \int_0^1 \frac{x^{-\lambda}}{1+x}\,dx \ ; \quad \Omega = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^\alpha}$$

b) Transformer $\mathcal{J}$ en posant $t = x^\lambda$, $\mathcal{I}$ en posant $t = x^{-\lambda}$ puis trouver une relation simple entre $\mathcal{J}$, $\mathcal{I}$ et Ω.

Tournez la page S.V.P.

2) Soit n entier ≥1.

Soit $A_n = \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \right] x^{\lambda-1} dx$ et $B_n = \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x^{k-1} \right] x^{-\lambda} dx$

a) Majorer par une puissance convenable de x :

$$\left| \sum_{k=0}^{m} (-1)^k x^k - \frac{1}{1+x} \right| \quad \text{(pour } x \in [0,1] \text{ et } m \in \mathbb{N}^*\text{)}.$$

b) En déduire une majoration simple de $|A_n - \ell|$ et de $|B_n - \ell|$ en fonction de n.

c) Que peut-on en déduire pour les suites : $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$?

3) Soit n entier ≥ 1 : simplifier $A_n + B_n - \frac{2}{\sin \lambda\pi} \left[\sum_{k=1}^{n} u_k \right]$.

En déduire ℓ (en fonction de α ou de λ).

PARTIE 3

On pose $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ $\qquad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} dt$ (pour x réel)

1) Préciser les ensembles de définition des fonctions Γ et F ainsi que les signes de ces fonctions.

2) Pour x>0, calculer $\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}$.

3) Trouver le sens de variation de la fonction F. F a-t-elle une limite quand x tend vers $+\infty$?

4) On considère x et A réels >0.

a) Trouver les signes de $\int_A^{+\infty} \frac{1-e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} dt - \int_A^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$

et de $\int_0^A \frac{1-e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha} dt - (1-e^{-xA^\alpha})F(0)$

b) Démontrer que la fonction F est continue à droite au point 0.

Tournez la page S. V. P.

5) On considère x et a réels >0.

a) Trouver les signes de $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt - e^{-xa^\alpha} F(0)$ et de $\int_0^a \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt - a$

b) En déduire, lorsque x tend vers $+\infty$, la limite de F(x).

6) On fixe le nombre x>0 et on considère h variable vérifiant l'inégalité $0<|h|<\frac{x}{2}$.

t étant (provisoirement) fixé on pose $\varphi(h) = \frac{e^{-(x+h)t^\alpha}}{1+t^\alpha}$

a) Appliquer l'inégalité de Taylor à l'ordre 1 entre 0 et h à la fonction φ pour majorer $\frac{|\varphi(h) - \varphi(0) - h\varphi'(0)|}{h^2}$ par un nombre R(t) indépendant de h et tel que $\int_0^{+\infty} R(t)\,dt$ converge.

b) En déduire que la fonction F est dérivable en x et donner F'(x).

7) Pour x > 0, calculer $\frac{F'(x)-F(x)}{\Gamma(\lambda+1)}$.

8) On pose, pour x>0, $L(x) = \int_x^{+\infty} e^{-y} y^{-\lambda}\,dy$ et $z(x) = e^{-x}F(x)$.

a) Quelles sont les limites quand x tend vers $+\infty$, de L(x) et z(x) ?

b) En utilisant la fonction L, calculer F(x) en fonction de x et λ (sans aucune constante arbitraire).

9) Que peut-on déduire de la formule précédente en faisant tendre x vers 0 ?

APPLICATION : calculer $\Gamma(\lambda)\,\Gamma(1-\lambda)$ (formule des compléments).

10) Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$ puis $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail